

# Algoritmi za cikličnu spektralnu analizu

D. Vučić, J. Kljujić

**Sadržaj** — Dat je uvod u teoriju obrade i analize ciklostacionarnih signala drugog reda, pregled teorije digitalne ciklične spektralne analize i opisani su principi i karakteristike računarski efikasnih algoritama za procenu ciličnog spektra, kao i neki aspekti njihove implementacije. Razmatrani su algoritmi na bazi vremenskog i frekvencijskog usrednjavanja cikličnih periodograma.

**Ključne reči** — Ciklostacionarnost, Spektralno-korelaciona analiza signala, ciklični spektar.

## I. UVOD

**T**EHNIKE ciklične spektralne analize (CSA) koriste inherentne periodičnosti signala i u odnosu na klasične metode, koje pretpostavljaju stacionarnost signala, imaju značajne prednosti u detekciji, klasifikaciji, identifikaciji i proceni parametara ciklostacionarnih (CS) signala. Periodičnosti u signalu se ispoljavaju kao korelacija između razdvojenih spektralnih komponentata, što predstavlja spektralnu redudansu. Frekvencija razdvajanja se naziva ciklična frekvencija i odgovara recipročnoj vrednosti CS perioda. Korišćenje ove spektralne redudanse, svojstvene svim CS signalima, značajno poboljšava performanse analize i obrade signala.

Većina komunikacionih i drugih namenski generisanih signala (*manmade signals*) ima CS osobine, koje su najčešće rezultat modulacije i kodovanja. Teorija CS signala obuhvata i policiklostacionarne (PCS) signale, tj. signale sa više neharmonijskih periodičnosti. Modulisani signali su ciklostacionarni. Njihove ciklične frekvencije, zavisnosno od tipa modulacije, pridružuju se

D. Vučić, Računarski fakultet, Srbija (telefon: 381-11-2623499; faks: 381-11-2508194; e-mail: [dvucic@raf.edu.rs](mailto:dvucic@raf.edu.rs)).

J. Kljujić, Računarski fakultet, Srbija (telefon: 381-11-2623499; faks: 381-11-2623287; e-mail: [jklujic@raf.edu.rs](mailto:jklujic@raf.edu.rs))

nosećoj frekvenciji, simboličkoj brzini, brzini čipa (*chip rate*), brzini skakanja (*hop rate*) i drugim periodičnostima. Ciklični spektar je vrlo važna CS osobina drugog reda. Procena cikličnog spektra i analiza odgovarajućih cikličnih obeležja (spektralno-korelaciona karakterizacija) često predstavljaju ključnu fazu u izboru efikasne obrade CS signala.

U teoriji CS procesa postoji stohastički pristup zasnovan na usrednjavanju po ansamblu i deterministički pristup zasnovan na usrednjavanju u vremenu.

## II. SPEKTRALNA KORELACIJA

### A. Stohastički pristup

Za signal  $x(t)$  se kaže da je ciklostacionaran (CS) drugog reda ako su njegova srednja vrednost  $m_x(t) \triangleq E\{x(t)\}$  i autokorelacija:

$$\mathfrak{R}_{xx}(t, \tau) = E \left\{ x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\} \quad (1)$$

periodične (jedan osnovni period  $T_0$ ), ili poliperiodične (više nesamerljivih osnovnih perioda  $T_i$ ) funkcije vremena ( $t$ ) [1, 2]. Teorija CS signala obuhvata i policiklostacionarne (PCS) signale, tj. signale sa više neharmonijskih periodičnosti. Za CS ili PCS signale autokorelacija  $\mathfrak{R}_{xx}(t, \tau)$  se može predstaviti u obliku Fourier-ovog reda:

$$\mathfrak{R}_{xx}(t, \tau) = \sum_{\alpha} \mathfrak{R}_{xx}^{\alpha}(\tau) \cdot e^{j2\pi\alpha t} \quad (2)$$

pri čemu se sabiranje u (2) vrši za sve harmonike svih osnovnih cikličnih frekvencija (recipročne vrenosti CS perioda, tj.  $\alpha_i = 1/T_i$ )  $\alpha = n \cdot \alpha_i$  ( $n$ - ceo broj) za koje ciklična autokorelacija, definisana kao:

$$\mathfrak{R}_{xx}^{\alpha}(\tau) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{Z} \int_{-Z/2}^{Z/2} \mathfrak{R}_{xx}(t, \tau) \cdot e^{-j2\pi\alpha t} dt \quad (3)$$

postoji kao funkcija od  $\tau$  i nije identički jednaka nuli [1, 2].

Ciklični spektar (spektralna korelacija) je Fourier-ova transformacija ciklične autokorelacije, tj.:

$$S_{xx}^{\alpha}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}_{xx}^{\alpha}(\tau) \cdot e^{-2\pi f \tau} d\tau \quad (4)$$

Izrazi za konjugovanu cikličnu autokorelaciju  $\mathfrak{R}_{xx}^{\alpha*}(\tau)$  i konjugovani ciklični spektar  $S_{xx}^{\alpha*}(f)$  kompleksnog signala  $x(t)$  ne sadrže operaciju konjugacije \* u (1) i odgovarajućim prethodnim definicijama.

Ciklični spektar predstavlja važnu karakteristiku CS signala drugog reda. Dakle, ako signal  $x(t)$  ispoljava ciklostacionarnost drugog reda u vremenskom domenu sa periodom  $1/\alpha$ , on ispoljava spektralnu korelaciju (ciklični spektar) sa pomerajem  $\alpha$  u frekvencijskom domenu.

Simetrične definicije autokorelacije i ciklične autokorelacije (1, 3), sa kašnjenjem  $\pm\tau/2$ , nisu pogodne u slučaju vremenski diskretizovanog signala  $\{x(n)=x(nT_s)\}$  ( $T_s$ - interval odabiranja). Zbog toga se u slučaju niza  $\{x(n)\}$  koristi asimetrična definicija autokorelacije:

$$\mathfrak{R}_{xx}(n, \tau) = E \left\{ x(n) \cdot x^*(n - \tau) \right\}. \quad (5)$$

$\tau$  je celobrojni umnožak intervala odabiranja  $T_s$  ( $\tau=iT_s$ ), a  $x(n) \triangleq x(nT_s)$ . Ako je autokorelacija  $\mathfrak{R}_{xx}(n, \tau)$  periodična sa periodom  $P$  ( $T_0=PT_s$ ) u vremenu  $n$  za svako  $\tau$ , tada se  $\mathfrak{R}_{xx}(n, \tau)$  može predstaviti pomoću Fourierovog reda (2), gde je  $\alpha=k/T_0$  i  $t=nT_s$ , pri čemu Fourierovi koeficijenti predstavljaju cikličnu autokorelaciju u diskretnoj verziji:

$$\mathfrak{R}_{xx}^k(\tau) = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \mathfrak{R}_{xx}(n, \tau) \cdot e^{-j(2\pi/P)kn}, \quad k = 0, 2, \dots, P-1 \quad (6)$$

Ciklični spektar u diskretnoj verziji se dobija odgovarajućom Fourierovom transformacijom od  $\mathfrak{R}_{xx}^k(\tau)$  u odnosu na  $\tau$ , tj.:

$$S_{xx}^k(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}_{xx}^k(\tau) \cdot e^{-j2\pi\tau f} \quad (7)$$

### B. Deterministički pristup

Ciklična autokorelacija signala  $x(n)$  se definiše kao:

$$R_{xx}^\alpha(k) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left[ x(n+k) e^{-j\pi\alpha(n+k)} \right] \cdot \left[ x(n) \cdot e^{j\pi\alpha n} \right]^* \quad (8)$$

Za signal  $x(n)$  se kaže da je ciklostacionaran drugog reda (ili u širem smislu) ako i samo ako je  $R_{xx}^\alpha(k) \neq 0$  za neko  $\alpha \neq 0$ . Ciklični spektar se dobija odgovarajućom Fourierovim transformacijom, tj.

$$S_{xx}^\alpha(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}^\alpha(k) \cdot e^{-j2\pi fk} \quad (9)$$

Ako je  $\alpha$  ciklična frekvencija, a  $f$  spektralna frekvencija, tada se ciklični spektar može predstaviti u trodimenzionalnoj ravni sa osama  $f$ ,  $\alpha$  i  $|S_{xx}^\alpha(f)|$ . U razvoju algoritama za procenu cikličnog spektra koristiti se deterministički pristup na vremenski diskretizovanom signalu  $x(n)$ .

### III. PROCENA CIKLIČNOG SPEKTRA

Ciklična spektralna analiza (CSA) predstavlja metod analize signala mnogo superiorniji u odnosu na klasične metode spektralne analize. Međutim, izračunavanje cikličnog spektra je znatno složenije i zahteva mnogo više vremena nego izračunavanje klasične spektralne gustine snage (PSD- *power spectral density*). Dakle, procena korelacije između spektralnih komponenata signala u poređenju sa procenom samih spektralnih komponenata čini CSA računarski složenim postupkom. Algoritmi za procenu cikličnog spektra se dele u dve grupe: algoritmi na bazi frekventijskog "peglanja" (FS- *frequency smoothing*) i algoritmi na bazi vremenskog "peglanja" (TS- *time smoothing*) cikličnih periodograma. Mada obe ove klase imaju slične aproksimacije cikličnog spektra (spektralna korelacija) i obe u graničnom procesu teže istoj pravnoj vrednosti, smatra se da su TS algoritmi računarski efikasniji u opštem slučaju ciklične spektralne analize. FS algoritmi su superiorniji samo u slučaju određenih ograničenja, npr. pri proceni spektralne korelacije za mali broj cikličnih frekvencija ili u slučaju malog vremensko- frekventijskog rezolucionog proizvoda [3]. Računarski efikasan FS algoritam je tzv. direktni ili digitalni metod sa frekventijskim usrednjavanjem (DFSM- *Direct/Digital Frequency Smoothing Method*), a računarski efikasni TS algoritmi su tzv. FFT akumulacioni metod (FAM) i trakasti spektralno-korelacioni algoritam (SSCA- *Strip Spectral Correlation Algorithm*).

U praksi, signali su dostupni u konačnom vremenskom intervalu i ciklični spektar se može samo proceniti primenom TS ili FS tehnika. Pri tome se u digitalnim implementacijama CSA posmatraju vremenski diskretizovani signali.

Ciklični spektar predstavlja korelaciju na observacionom intervalu  $\Delta t$  lokalnih spektralnih komponenata  $X_T(n, f)$  na frekvencijama  $f + \alpha/2$  i  $f - \alpha/2$  u vremenskom prozoru širine  $T$  i u graničnom procesu kada  $\Delta t \rightarrow \infty$  i  $T \rightarrow \infty$  ( $\Delta f = 1/T \rightarrow 0$ ), tj.

$$S_{xx}^{\alpha}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{T \cdot \Delta t} \sum_{m=n-\Delta t/2}^{n+\Delta t/2} X_T(n, f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(n, f - \frac{\alpha}{2}) \quad (10)$$

gde je

$$\begin{aligned} X_T(n, f) &= \sum_{r=-T/2}^{T/2} w(r)x(n-r)e^{-j2\pi f(n-r)T_s} \\ &= \left[ \sum_{r=-T/2}^{T/2} w(-r)x(n+r)e^{-j2\pi f r T_s} \right] \cdot e^{-j2\pi f n T_s} \end{aligned} \quad (11)$$

STFT (*Short Time Fourier Transform*), ili kompleksni demodulat signala  $x(n)$  sa frekvencijom odabiranja  $f_s = 1/T_s$ .

Računarski efikasni algoritmi za izračunavanje cikličnog spektra  $S_{xx}^\alpha(f)$  koriste vremensko ili frekvencijsko usrednjavanje (“peglanje”) cikličnih periodograma definisanih kao [3]:

$$S_{x_T}^\alpha(t, f) = \frac{1}{T} X_T(n, f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(n, f - \frac{\alpha}{2}) \quad (12)$$

#### A. Osnovni principi FS algoritama

FS (*Frequency Smoothing*) algoritmi za izračunavanje cikličnog spektra zasniavaju se na frekvencijskom usrednjavanju cikličnih periodograma:

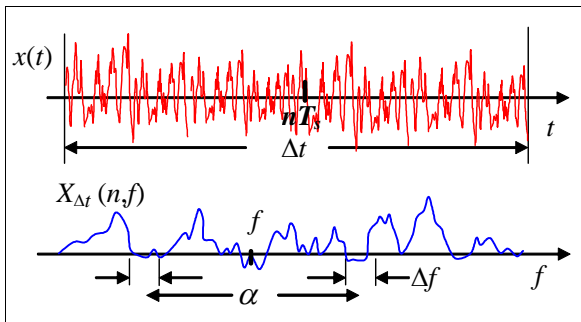
$$S_{x_{\Delta t}}^\alpha(f) \approx S_{x_{\Delta t}}^\alpha(n, f)_{\Delta f} = \frac{1}{\Delta f \cdot \Delta t} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} X_{\Delta t}(n, f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_{\Delta t}^*(n, f - \frac{\alpha}{2}) df \quad (13)$$

gde je

$$X_{\Delta t}(n, f) = \sum_{m=n-\Delta t/2}^{n+\Delta t/2} x(m) e^{-j2\pi f m T_s} \quad (14)$$

STFT, ili kompleksni demodulat signala  $x(n)$  na observacionom intervalu  $\Delta t$ .

Dakle, FS procena cikličnog spektra ( $S_{x_{\Delta t}}^\alpha(n, f)_{\Delta f}$ ) je rezultat korelacije spektralnih komponenta signala  $x(n)$  u frekvencijskom opsegu  $\Delta f$ . Veličine  $\Delta f$  i  $\Delta t$  se nazivaju frekvencijska i vremenska rezolucija procene, respektivno. Za dobru procenu je potrebno da rezolucioni proizvod  $\Delta f \cdot \Delta t$  bude velik, tj.  $\Delta f \cdot \Delta t \gg 1$ . Na sl.1 su ilustrovani parametri FS cikličnog periodograma.



Sl.1- Ilustracija parametara FS cikličnog periodograma

FS ciklični periodogram u graničnom procesu kada  $\Delta t \rightarrow \infty$  i  $\Delta f \rightarrow 0$  daje stvarni (idealni) ciklični spektar, tj.

$$S_{xx}^\alpha(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} S_{x_{\Delta t}}^\alpha(n, f)_{\Delta f} \quad (15)$$

B. Osnovni principi TS algoritma

TS (Time Smoothing) algoritmi za izračunavanje cikličnog spektra zasnivaju se na vremenskom usrednjavanju (“peglanje”) cikličnih periodograma, odnosno procena cikličnog spektra odgovara TS cikličnom periodogramu:

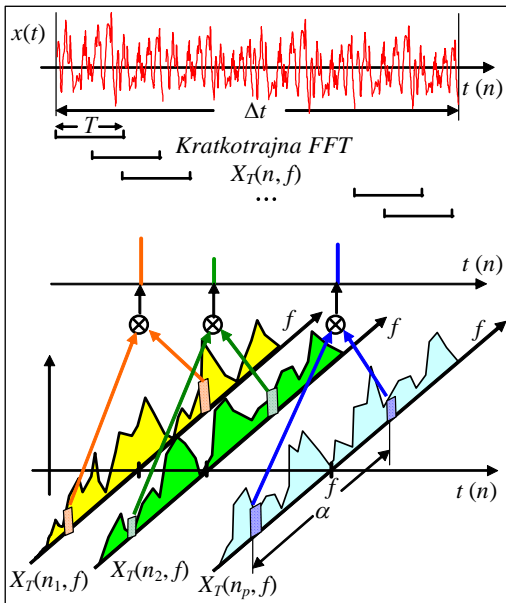
$$S_{xx}^\alpha(f) \approx S_{X_T}^\alpha(n, f)_\Delta t = \frac{1}{\Delta t \cdot T} \sum_{m=n-\Delta t/2}^{n+\Delta t/2} X_T(m, f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(m, f - \frac{\alpha}{2}) \quad (16)$$

gde je

$$X_T(n, f) = \sum_{m=n-T/2}^{n+T/2} x(m) e^{-j2\pi f m T}, \quad (17)$$

kratkotrajna Fourier-ova transformacija, ili kompleksni demodulat signala  $x(n)$  na mnogo kraćem vremenskom prozoru trajanja  $T$ , pošto je  $T \ll 1/\Delta t$ .

Dakle, TS procena cikličnog spektra, odnosno TS ciklični periodogram  $S_{X_T}^\alpha(n, f)_\Delta t$  je rezultat diskretne korelacije kratkotrajnih spektralnih komponenta signala  $x(n)$  na vremenskom intervalu  $\Delta t$ . U ovom slučaju je frekvencijska rezolucija  $\Delta f = 1/T$ .



Sl.2- Ilustracija TS procene cikličnog spektra

Na sl.2 je ilustrovan postupak TS procene cikličnog spektra za proizvoljnu vrednost  $(f, \alpha)$ . Za neki signal  $x(n)$  vrši se procena spektralnih komponenta u vremenskom prozoru širine  $T$  duž celog opservacionog vremenskog intervala  $\Delta t$ . U svakom vremenskom prozoru množe se dve spektralne komponente centrirane na frekvenciji  $f$  i frekvencijski razdvojene za  $\alpha$ , a sekvenca ovih proizvoda se integriše duž opservacionog intervala  $\Delta t$ .

TS ciklični periodogram u graničnom procesu kada  $\Delta t \rightarrow \infty$  i  $T \rightarrow \infty$  ( $\Delta f = 1/T \rightarrow 0$ ) daje stvarni (idealni) ciklični spektar, tj.

$$S_{xx}^\alpha(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} S_{x_T}^\alpha(n, f)_{\Delta t} \quad (18)$$

C. Osnovne karakteristike FS i TS procene cikličnog spektra

Redosled dvostrukih graničnih procesa (limesa) u izrazima (15) i (18) se ne može promeniti.

I FS i TS pristupi su ekvivalentni, tj.  $S_{x_{\Delta t}}^\alpha(n, f)_{\Delta t} \approx S_{x_T}^\alpha(n, f)_{\Delta t}$ , ako i samo ako je  $\Delta f \cdot \Delta t \gg 1$ .

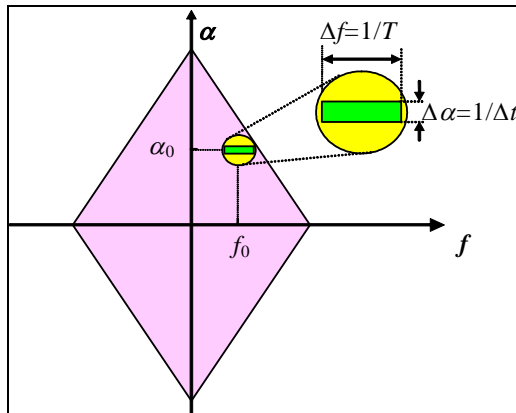
Pouzdana procena zahteva se veliki rezolucioni proizvod ( $\Delta f \cdot \Delta t \gg 1$ ), tj. opservacioni interval  $\Delta t$  mora biti znatno veći od vremenskog prozora  $T$ .

Izbor rezolucionog proizvoda  $\Delta f \cdot \Delta t$  zavisi od signala koji se analiziraju i stepena pouzdanosti procene cikličnog spektra koja se želi postići.

U opštem slučaju ciklične spektralne analize TS pristup je efikasniji od FS pristupa.

Veličine  $\Delta f$ -i  $\Delta t$  predstavljaju spektralnu i vremensku rezoluciju (kod TS procene je  $\Delta f = 1/T$ ), a ciklična rezolucija za FS i TS procenu iznosi  $\Delta \alpha = 1/\Delta t$ .

Procena cikličnog spektra u nekoj tački  $(f_0, \alpha_0)$  bifrekvencijske ravni  $(f, \alpha)$  pokriva samo malu površinu  $\Delta f \cdot \Delta \alpha$  (spektralno-ciklični rezolucioni proizvod), sl.3. Dakle, ciklična spektralna analiza je računarski vrlo zahtevna jer je za kompletnu cikličnu analizu signala potrebno izvršiti vrlo veliki broj procena da bi se analizirala (prekrila) cela bifrekvencijska ravan  $(f, \alpha)$ .



Sl.3- Procena cikličnog spektra u tački  $(f_0, \alpha_0)$  bifrekvencijske ravni za signal u osnovnom opsegu; frekvencijska i ciklična rezolucija.

## IV. DIGITALNI ALGORITMI ZA PROCENU CIKLIČNOG SPEKTRA

Procena cikličnog spektra je vrlo bitna u mnogim primenama obrade i analize ciklostacionarnih signala. Ako postoji apriorno znanje koje su ciklične frekvencije od interesa i ako broj tih cikličnih frekvencija nije velik, tada su složenost i računarski zahtevi pri proceni cikličnog spektra poredivi sa klasičnom spektralnom analizom. Međutim, ako nisu poznate ciklične frekvencije od interesa, potrebno je proceniti ciklični spektar u celoj bifrekvencijskoj ravni. U tom slučaju računarsko opterećenje je znatno veće nego u slučaju klasične spektralne analize. To je posledica dodatne dimenzije ciklične frekvencije, koja ne postoji u klasičnoj spektralnoj analizi i što predstavlja značajan doprinos CSA. Značaj CSA s jedne strane i složenost s druge strane nameću iznalaženje računarski efikasni algoritama za procenu cikličnog spektra. Ovi računarski efikasni algoritami za procenu cikličnog spektra, kao što je rečeno, zasnivaju se na FS ili TS pristupu, a postoji i hibridni pristup (združeni FS i TS pristup). Generalno, TS pristup se zasniva na računarski efikasnoj brznoj Fourier-ovoj transformaciji (FFT- *Fast Fourier Transform*) i smatra se efikasnijim od FS pristupa kada se procenjuje ciklični spektar na velikom delu (ili celoj) bifrekvencijske ravni. Među TS algoritimima razmatraju se FFT akumulacioni metod (FAM-FFT *Accumulation Method*) i trakasti spektralno-korelacioni algoritam (SSCA-*Strip Spectral Correlation Algorithm*). FS pristup se generalno smatra efikasnim kada se procena cikličnog spektra vrši duž linija konstantne ciklične frekvencije i za mali broj cikličnih frekvencija. Među FS algoritimima izdvaja se tzv. direktni ili digitalni FS metod (DFSM- *Direct/Digital Frequency Smoothing Method*), koji prvo proračunava frekvencijske komponente, a zatim računa spektralnu korelaciju direktno na tim komponentama u određenom frekvencijskom opsegu  $\Delta f$ . Ovakav direktni FS pristup je generalno superiorniji od nekih indirektnih FS pristupa, kao što je WVD (*Wigner-Ville Distribution*) raspodela.

## A. Direktni FS metod- DFSM

Osnovu DFSM predstavlja diskretni (usrednjavanje po diskretnoj frekvenciji) FS periodogram

$$S_{x_N}^{\alpha}(n, k)_{\Delta k} = \sum_{m=-M/2+1}^{M/2} X_N(n, k + m + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_N^*(n, k + m - \frac{\alpha}{2}) \quad (19)$$

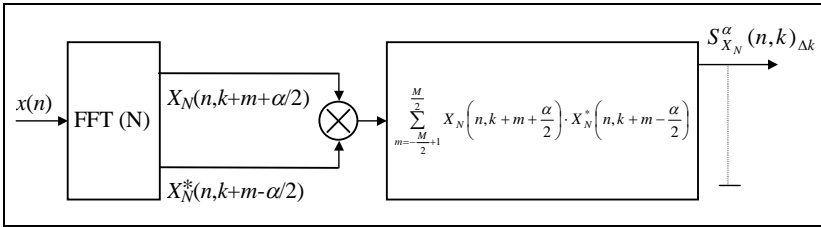
gde je



$$\begin{aligned}
 X_N(n, k) &= \sum_{r=-N/2}^{N/2-1} w(r)x(n-r) \cdot e^{-j2\pi k(n-r)/N} \\
 &= \left[ \sum_{r=-N/2+1}^{N/2} w(-r)x(n+r) \cdot e^{-j2\pi kr/N} \right] \cdot e^{-j2\pi kn/N}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

STFT, ili kompleksni demodulat signala  $x(n)$ ;  $w(n)$  je pravougaoni vremenski prozor dužine  $N$ , što je ukupan broj FFT tačaka na celom opservacionom intervalu  $\Delta t$ ;  $\alpha$  je diskretni ekvivalent ciklične frekvencije, frekvencijsko usrednjavanje je na intervalu  $-M/2+1 \leq m \leq M/2$  i  $\Delta k = M \cdot f_s / N$  je frekvencijska rezolucija frekvencijskog ekvivalenta ( $f_s$  je frekvencija odabiranja).

Blok dijagram koji ilustruje digitalnu implementaciju DFSM algoritma [5] prikazan je na sl. 4. Za obezbeđenje potpunog prekrivanja bifrekvencijske ravni sa minimalnim računanjem potrebno je izraz (19) izračunavati duž linije sa konstantnom cikličnom frekvencijom  $\alpha$ , pri čemu su procene spektralno razmaknute za  $\Delta k = M \cdot f_s / N$ . Ovaj metod je lako implementirati, ali postaje računarski zahtevan uglavnom u bloku gde se sekvence proizvoda kompleksnih demodulata sabiraju.



Sl.4- Digitalna realizacija DFSM algoritma.

### B. FFT akumulacioni metod

FFT akumulacioni metod (FAM) je TS metod razvijen da bi smanjio broj izračunavanja potreban za procenu cikličnog spektra. Ova tehnika deli bifrekvencijsku ravan u manje oblasti tzv. kanalnih parova (oblast romba) u kojima se izračunavaju procene cikličnog spektra u bloku (uvođenjem dodatnih cikličnih pomeraja) primenom FFT [3].

U digitalnoj verziji procena TS periodograma na osnovu (16) i (17) dobija oblik:

$$S_{X_N}^{\alpha}(n, k)_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} X_N(n, k + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_N^*(n, k - \frac{\alpha}{2}) \right]
 \tag{21}$$

gde je

$$X_N(n, k) = \sum_{r=-N/2}^{N/2-1} w(r)x(n-r) \cdot e^{-j2\pi k(n-r)/N'} \quad (22)$$

STFT, ili kompleksni demodulat signala  $x(n)$ ,  $w(n)$  je prozor za uobličavanje (npr. *Hamming*-ov prozor) trajanja  $T=N'T_s$  i diskretni ekvivalent od  $f$  je  $k$  ( $\alpha$  je diskretni ekvivalent ciklične frekvencije).

Na osnovni TS algoritam mogu se primeniti dve modifikacije u cilju povećanja računarske efikasnosti i to: korišćenje FFT za relizovanje vremenskog “peglanja” i korišćenje računarski efikasnih algoritama za računanje kompleksnih demodulata. Prva modifikacija se vrši uvođenjem dodatnog cikličnog pomeraja u sekvence proizvoda kompleksnih demodulata (ciklični periodgrami), čijom se diskretizacijom omogućuje procena (primenom FFT) cikličnih periodgrama za određenu spektralnu frekvenciju  $k \cdot \Delta f = k \cdot f_s / N'$  i skup cikličnih frekvencija  $\alpha + q \cdot \Delta \alpha = \alpha + q \cdot \Delta t = \alpha + q \cdot f_s / N$ . Drugom modifikacijom se povećava računarska efikasnost računanja kompleksnih demodulata uvođenjem decimacije sa faktorom  $L$  (“skače” se za  $L$  odbiraka između susednih izračunavanja kompleksnih demodulata) pa se dobija:

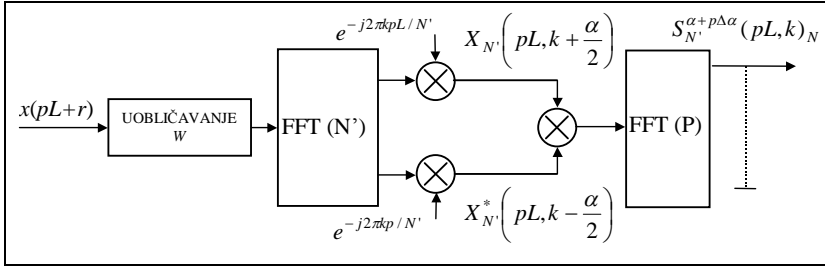
$$\begin{aligned} X_{N'}(pL, k) &= \sum_{r=-N'/2}^{N'/2-1} w(r)x(pL-r) \cdot e^{-j2\pi k(pL-r)/N'} \\ &= \left[ \sum_{m=0}^{N'/2-1} w \left[ \left( \frac{N'}{2} - 1 \right) - m \right] x \left[ pL - \left( \frac{N'}{2} - 1 \right) + m \right] \cdot e^{-j2\pi km/N'} \right] \cdot e^{-j2\pi k \left[ pL - \left( \frac{N'}{2} - 1 \right) \right] / N'} \end{aligned} \quad (23)$$

Na ovaj način se broj kompleksnih demodulata u sekvenci signala trajanja  $\Delta t = N \cdot T_s$  smanjuje sa  $N$  na  $P=N/L$ . Kombinacija opisanih modifikacija, tj. primena decimacije pri proračunu kompleksnih demodulata i uvođenje dodatnog cikličnog frekvencijskog pomeraja, rezultira u tzv. FFT akumulacioni metod (FAM) gde se za procenu TS periodograma dobija:

$$S_{X_{N'}}^{\alpha+q\Delta\alpha}(pL, k)_N = \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} \left[ \frac{1}{N'} X_{N'}(rL, k + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_{N'}^*(rL, k - \frac{\alpha}{2}) \right] \cdot g_d(p-r) \cdot e^{-j2\pi r q / P} \quad (24)$$

gde  $g_d(r)=g(rL)$  decimirani (faktor decimacije  $L$ ) prozor za ponderisanje na celom intervalu  $\Delta t$  (najčešće provougaoni prozor). Ovaj izraz za TS periodgram može se efikasno izračunati primenom FFT u  $P$  tačaka, pri čemu daje procene za blok cikličnih frekvencija.

Blok dijagram koji ilustruje digitalnu implementaciju FAM algoritma [5] prikazan je na sl. 5



Sl.5- Digitalna realizacija FAM algoritma.

Dakle, FAM algoritam se sastoji od tri osnovna postupka: izračunavanje kompleksnih demodulata (deljenjem signala od ukupno  $N$  odbiraka u uobličene blokove od po  $N'$  blokova i pomerene za  $L$  odbiraka, izračunavanjem “klizeće” FFT u  $N'$  tačaka i frekvencijskom konverzijom u osnovni opseg tih rezultata), izračunavanje sekvenci proizvoda demodulata (oblast kanalnog para u bifrekvencijskoj ravni) i vremensko “peglanje” tih sekvenci proizvoda primenom FFT u  $P$  tačaka.

Ako je frekvencija odabiranja  $f_s$ , rezolucija po cikličnoj frekvenciji iznosi  $\Delta\alpha = f_s/N$ , a po spektralnoj frekvenciji  $\Delta f = f_s/N'$ , pri čemu treba da bude zadovoljen uslov stabilnosti procene  $N/N' \gg 1$  (odgovara uslovu  $\Delta t \cdot \Delta f \gg 1$ , odnosno  $\Delta f / \Delta\alpha \gg 1$ ).

Pokazuje se da jezgro transformacije FAM algoritma ima oblik [3]

$$\begin{aligned}
 M(\alpha, f) &= G_c(\alpha - \alpha_0) \cdot W\left(f - f_0 + \frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right) \cdot W^*\left(f - f_0 - \frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right) = \\
 &= G_c(\alpha - \alpha_0) \cdot W\left(f - f_1 + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot W^*\left(f - f_2 - \frac{\alpha}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

gde je  $f_1 = f_0 + \alpha_0/2$  i  $f_2 = f_0 - \alpha_0/2$ ,  $W(f)$  je diskretna Fourier-ova transformacija (DFT) prozora za ponderisanje  $w(n)$ , a DFT češljastog filtra  $G_c(\alpha)$  je data sa:

$$G_c(\alpha) = \sum_r g_c(r) \cdot e^{-j2\pi\alpha r T_s} = \sum_n G_d\left(\alpha + \frac{nf_s}{L}\right)
 \tag{26}$$

$G_d(\alpha)$  predstavlja jedan period od Fourier-ove transformacije češljastog filtra  $G_c(\alpha)$ , tj.

$$G_d(\alpha) = \begin{cases} \sum_m g_d(m) \cdot e^{-j2\pi\alpha m L T_s}, & |\alpha| < f/2L \\ 0, & |\alpha| \geq f/2L \end{cases}
 \tag{27}$$

Dakle kod proračuna decimiranih kompleksnih demodulata  $g(n)$  se zamenjuje češljastim (*comb*) filtrom:

$$g_c(n) = \sum_m \delta(n - mL) \cdot g(n) / \sum_k g(kL) \quad (28)$$

a izlazi se odabiraju u trenucima  $n=PL$ .

Dakle, jezgro transformacije  $M(\alpha, f)$  se sastoji od dve komponente i to od proizvoda frekvencijski pomerenih trakastih transfer funkcija:

$$M_1(\alpha, f) = W(f - f_1 + \frac{\alpha}{2}) \cdot W^*(f - f_2 - \frac{\alpha}{2}) \quad (29)$$

i češljastog (*comb*) filtra:

$$G_c(\alpha - \alpha_0) = \sum_n G(\alpha - \alpha_0 + \frac{nf_s}{L}) \quad (30)$$

Dakle, jezgro  $M(\alpha, f)$  ima oblik:

$$M(\alpha, f) = M_1(\alpha, f) \cdot G_c(\alpha - \alpha_0) \quad (31)$$

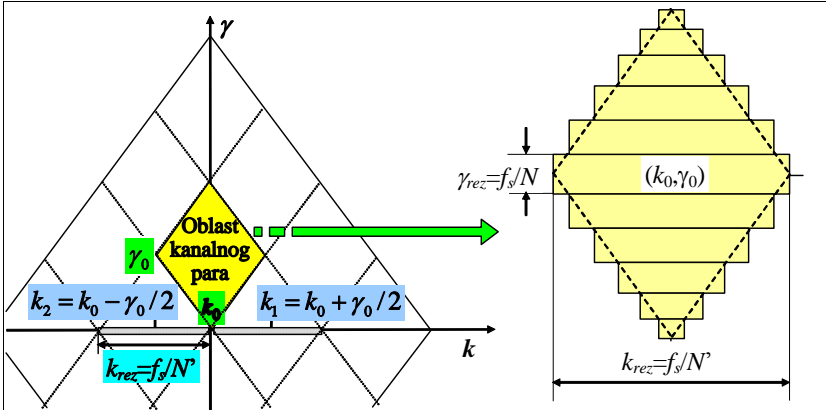
Širina propusnog opsega od  $W(f)$  je reda  $\Delta w = \Delta f = f_s / N$  (odgovara frekvencijskoj rezoluciji), a "češalj"  $G_c(\alpha)$  ima "zubce" širine propusnog opsega  $\Delta \alpha = 1 / \Delta t = f_s / N$  (odgovara cikličnoj rezoluciji) razmaknute za po  $f_d / L$  po cikličnoj frekvenciji. Presek para trakastih oblasti daje oblast romba  $M_1(\alpha, f)$  i naziva se oblast kanalnog (ili trakastog) para. Presek oblasti romba  $M_1(\alpha, f)$  sa oblasti "zubca"  $G_c(\alpha - \alpha_0)$  za  $n=0$  određuje CSA (ciklična spektralna analiza) ćeliju (sl.4.3) u tački  $(f_0, \alpha_0)$ . Ciklično "curenje" nastaje ako su bočni listovi od  $M(\alpha, f)$  dovoljno veliki da "uključue" susedna ciklična obeležja u procenu spektralne korelacije, ili ako "zubac" od  $G_c(\alpha - \alpha_0)$ , različit od onog na  $\alpha_0$ , preseca oblast trakastog para  $M_1(\alpha, f)$ . Preklapanje trakastog para  $M_1(\alpha, f)$  sa "zubcem"  $G_c(\alpha - \alpha_0)$  za  $n \neq 0$  nastaje ako je faktor decimacije  $L$  suviše veliki. Ciklično "presavijanje" nastaje ako ciklično "curenje" premašuje decimiranu frekvenciju odabiranja.

Oblast oblika romba u preseku traka glavnih listova od  $W(f: f_1 + \alpha/2)$  i  $W(f: f_2 - \alpha/2)$ , predstavlja tzv. oblast trakastog para ili kanalnog para (sl.6) i ima širinu  $\Delta w = \Delta f$  i visinu  $2\Delta w = 2\Delta f$ . Presek oblasti trakastog para sa glavnim listom od  $G_c(\alpha - \alpha_0)$  određuje CSA ćeliju u tački  $(f_0, \alpha_0)$ , čiji je digitalni ekvivalent  $(k_0, \gamma_0)$ . Širina CSA ćelije po cikličnoj frekvenciji  $\alpha$  (odgovara širini glavnog lista od  $G_c(\alpha)$ ) iznosi  $\Delta \alpha = 1 / \Delta t$  (digitalni ekvivalent  $\gamma_{rez} = f_s / N$ ) i određuje cikličnu rezoluciju, a širina CSA ćelije po spektralnoj frekvenciji  $f$  (odgovara širini glavnog lista od  $W(f)$ ) iznosi  $\Delta f = \Delta w = 1 / T$  (digitalni ekvivalent  $k_{rez} = f_s / N$ ) i određuje frekvencijsku rezoluciju (sl.6).

Iz sl. 6 se vidi da procene cikličnog spektra na dnu i vrhu kanalnog para ne zadovoljavaju uslov pouzdanosti procene. Jedino je u centru kanalnog para  $\Delta f / \Delta \alpha = N / N^2 (>> 1)$ . Zbog toga se ciklične frekvencije  $\alpha + q\Delta \alpha$  procenjuju

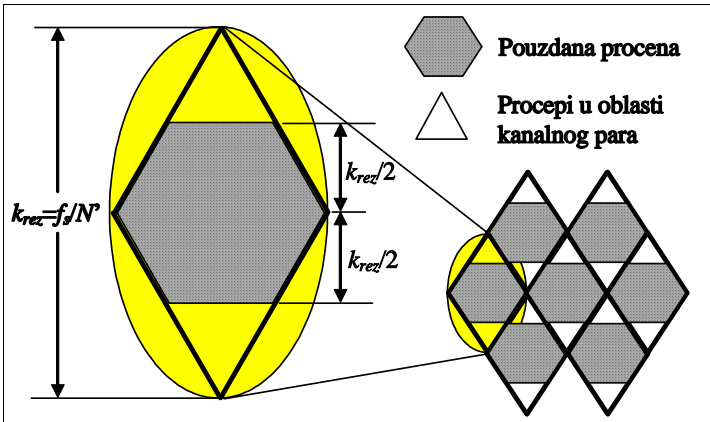
samo u opsegu  $\pm k_{rez}/2 = \pm f_s/2N'$  (po  $\alpha$ ) od centra oblasti kanalnog para, tj. vrednosti za  $q$  u (24) uzimaju se samo u opsegu:

$$-\frac{N}{2N'} \leq q \leq \frac{N}{2N'} - 1 \Rightarrow -\frac{PL}{2N'} \leq q \leq \frac{PL}{2N'} - 1 \quad (32)$$

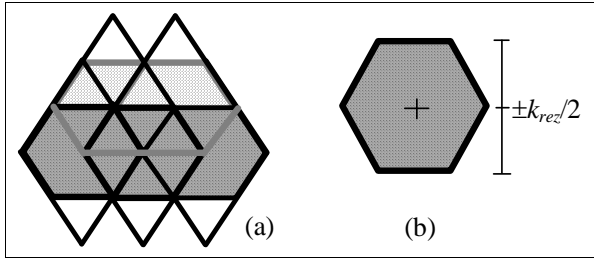


Sl.6- Podela bifrekvencijske ravni ( $f, \alpha$ ) na oblasti kanalnih parova.

Uzimajući na ovaj način samo neke od procena cikličnog spektra nastaju procepi u bifrekvencijskoj ( $f, \alpha$ ) ravni (sl.7). Ovaj efekat se ublažava korišćenjem prozora za uobličavanje  $w(n)$  pri proceni kompleksnih demodulate, (22), čime se obezbeđuje bolje prekrivanje u bifrekvencijskoj ( $f, \alpha$ ) ravni (sl.8).



Sl.7- Procepi u bifrekvencijskoj ( $f, \alpha$ ) ravni kada se procene cikličnog spektra po  $\alpha$  uzimaju samo u opsegu  $\pm k_{rez}/2$  od centra oblasti kanalnog para.



Sl.8- Preklapanje oblasti kanalnog para (a) sa Hamming-ovim prozorom, (b) Oblast kanalnog para je pokrivena procenama u opsegu  $\pm k_{rez}/2$  od centra oblasti kanalnog para.

Efikasnost FAM algoritma se postiže primenom efikasnog FFT, koji blok procenom značajno redukuje broj izračunavanja, i primenom decimacije (faktor decimacije  $L$ ) kod računanja STFT, tj. njenim izračunavanjem tek posle svakih  $L$  novih odbiraka. Da bi se zaštitili od cikličnog curenja pri proceni cikličnog spektra treba da bude  $L \leq N/4$  [3].

Na kraju, sumarno, digitalna verzija FAM algoritma za procenu cikličnog spektra se svodi na sledeće relacije:

$$S_{X_N}^{\gamma_0 + q\Delta\gamma}(n, k_0)_N = \sum_{m=0}^{P-1} \left[ X_N(n + mL, k_0 + \frac{\gamma_0}{2}) \cdot X_N^*(n + mL, k_0 - \frac{\gamma_0}{2}) \cdot e^{-j2\pi r \gamma_0 m L / N'} \right] \cdot e^{-j2\pi m q / P} \quad (33)$$

gde je

$$X_N(r, k) = \sum_{n=0}^{N'-1} w(n)x(n+r) \cdot e^{-j2\pi kn / N'} \quad (34)$$

Dužina produktne sekvence je  $P$ , a  $w(n)$  su koeficijenti prozora za uobličavanje.

### C. Trakasti spektralno-korelacioni algoritam-SSCA

Drugi algoritam na bazi vremenskog usrednjavanja je trakasti spektralno-korelacioni algoritam (SSCA- *Strip Spectral Correlation Algorithm*). Korelacijom kompleksnih demodulata (22) na vremnskom intervalu  $\Delta t = NT_s$  ( $T_s$ - interval odabiranja) dobija se TS (*time smoothing*) ciklični perodgram u obliku.

$$S_{x_T}^{\alpha}(n, f)_{\Delta t} = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} X_T(n+m, f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(n+m, f - \frac{\alpha}{2}) \cdot g(m) \quad (35)$$

gde je  $g(m)$  prozor sa uobličavanjem dužine  $\Delta t$ , a kompleksni demodulati se mogu predstaviti kao:

$$X_T(n, k) = \sum_{r=-N'/2}^{N'/2} w(r)x(n-r) \cdot e^{-j2\pi f(n-r)T_s} = \left[ \sum_{r=-N'/2}^{N'/2-1} w(r)x(n+r) \cdot e^{-j2\pi f r T_s} \right] \cdot e^{-j2\pi f n T_s} \quad (36)$$

Da bi  $S_{x_T}^\alpha(n, f)_\Delta t$  bila pouzdana procena cikličnog spektra  $S_x^\alpha(f)$  potrebno je da bude  $\Delta t \cdot \Delta f \gg 1$  (tj.  $\Delta t \gg T$ ). U graničnom procesu ( $\Delta t \rightarrow \infty$  i  $\Delta f \rightarrow \infty$ ) i kada su  $w(n)$  i  $g(n)$  normalizovani tako da je:

$$\sum_n w^2(n) = \sum_n g(n) = 1 \quad (37)$$

tada je [3]

$$S_{x_T}^\alpha(n, f)_\Delta t = S_x^\alpha(f) \quad (38)$$

Da bi se operacija usrednjavanja u (35) transformisala u FFT operaciju treba produktnu sekvencu frekvencijski pomeriti za  $\gamma$  ( $\alpha \rightarrow \alpha + \gamma$ ), pri čemu se dobija:

$$S_{x_T}^{\alpha+\gamma}(n, f)_\Delta t = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} X_T(n+m, f + \frac{\alpha}{2}) \cdot X_T^*(n+m, f - \frac{\alpha}{2}) \cdot g(m) \cdot e^{-j2\pi \gamma m T_s} \quad (39)$$

Može se zaključiti, što je oblašnjeno kod FAM algoritma da je na ovaj način frekvencijska rezolucija jednaka  $\Delta f = \Delta w / \gamma$  tj. frekvencijska rezolucija je neuniformna jer se uzima nekoliko vrednosti  $\gamma$  u jednoj ćeliji CSA (CSA-Cyclic Spectrum Analyzer). Dakle, ako je  $\gamma = q \cdot \Delta \alpha$  dobija se:

$$S_{x_T}^{\alpha_i+q\Delta\alpha}(n, f_j)_\Delta t = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} X_T(n+m, f_k) \cdot X_T^*(n+m, f_l) \cdot g(m) \cdot e^{-j2\pi m q / N} \quad (40)$$

što predstavlja centriranu FFT od N tačaka.

Frekvencije  $f_k = k(f_s/N')$ ,  $k = -N'/2, \dots, N'/2-1$  prekrivaju celu bifrekvencijsku ravan  $(f, \alpha)$ . Veza između  $f_j$  i  $\alpha_i$  sa  $f_k$  i  $f_l$  je sledeća:

$$f_j = \frac{f_k + f_l}{2} = \frac{k+l}{2} \left( \frac{f_s}{N'} \right) \quad (41)$$

$$\alpha_i = f_k - f_l = (k-l) \cdot \left( \frac{f_s}{N'} \right) \quad (42)$$

Pokazuje se [4] da se u SSCA algoritmu (izraz 40) može staviti  $\alpha_i = f_k$ ,  $f_j = (f_k - q\Delta\alpha)/2$  i  $X_T^*(n, f_j)$  zameniti sa ne filtriranim signalom  $x^*(n)$ , tako da se dobija:

$$S_{x_T}^{f_k+q\Delta\alpha}(n, \frac{f_k - q\Delta\alpha}{2})_\Delta t = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} X_T(n+m, f_k) \cdot x^*(n+m) \cdot g(m) \cdot e^{-j2\pi q m / N} \quad (43)$$

Na ovaj način se obezbeđuje da  $\Delta f$  i  $\Delta t \cdot \Delta f$  imaju uniformnu vrednost, što je poželjno i vrlo važno za procenu cikličnog spektra. Procene cikličnog spektra dobijene pomoću (43) leže duž familije frekvecijskih kosih linija  $\alpha = 2f_k - 2f$  i formiraju jednu traku za svako  $f_k$  (sl.9).

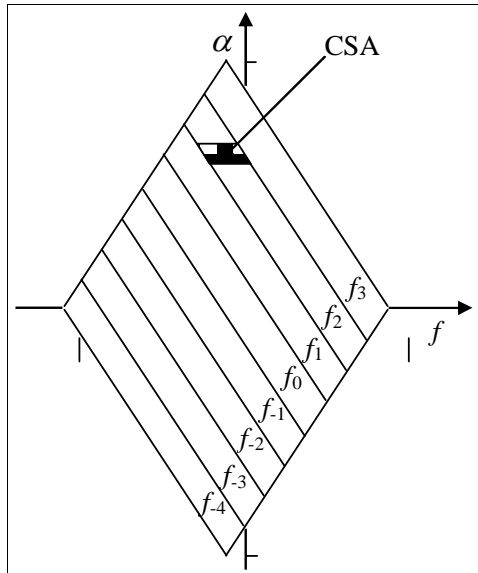
U implementaciji SSCA koriste se sledeće relacije između parametara:

$$\Delta f = 1/N', \Delta \alpha = 1/\Delta t = 1/N, \Delta f \Delta t = N/N', w(0) = \sum_n g(n) = 1 \quad (44)$$

$$\alpha = f_k + q\Delta\alpha, \quad k = -N'/2, \dots, N'/2 - 1 \quad (45)$$

$$f = \frac{f_k - q\Delta\alpha}{2}, \quad q = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (46)$$

Zbog množenja sa nefiltriranim ulaznim signalom  $x^*(n)$ , za razliku od FAM algoritma, mora se zadržati puna frekvencija odabiranja ulaznog signala, tj nema decimacije. Da bi se uvela decimacija predloženo je [3, 5] da se "klizeći" prozor ulaznog kanalizatora pomera za faktor decimacije  $L$  za svaki blok od  $N'$  ulaznih odbiraka, ali pre množenja sa ulaznim signalom "hold" kolo ubacuje vrednosti  $X_{Dk}(rL+n)$  kao  $X_{Dk}^h(rL)$  za  $1 \leq n \leq L-1$  tako da se izlaz korelacionog množača dobija sa punom frekvencijom odabiranja. Međutim, neka istraživanja pokazuju da uvođenje "hold" operacije stvara neka lažna ciklična obeležja. Bez obzira na neke dobitke u obimu izračunavanja i smanjenju memorijskog prostora, postupak sa "hold" operacijom neće se dalje razmatrati.





SI.9- Prekrivanje bifrekvencijske oblasti sa SSCA.

LITERATURA

- [1] Gardner, W.A., Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, IEEE Press, New York, 1994.
- [2] Gardner, W.A., Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [3] Roberts R.S., Brown W.A., and Loomis H.H., Jr., "Computationally efficient algorithms for cyclic spectral analysis", *IEEE Signal Processing Mag.*, Vol. 8, pp. 38-49, April 1991.
- [4] Eric, A., Tehnical note 94-2, Ottawa, February 1994.
- [5] Brown W.A., and Loomis H.H., Jr., "Digital implementations of spectral correlation analyzers", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.41, No.2, pp. 703-720, February 1993.

ABSTRACT

**This paper provides an introduction to the theory of the second order cyclostationary signal processing and analysis. It reviews the theory behind digital cyclic spectral analysis and describes principles and characteristics of the computationally efficient algorithms for cyclic spectrum estimation, and some aspects of their digital implementation. Algorithms based on either the time or frequency smoothed cyclic periodgram are considered.**

**ALGORITHMS FOR CYCLIC SPECTRAL ANALYSIS**

Desimir Vučić and Jelena Kljujić